流体力学的不安定性と乱流の発生

広島大理　八 幡 英 雄

円管中に水を流し，入口付近で細い管から注入した色素の水の流れに沿った運動を追うことにより，層流から乱流への遷移を明瞭に示した Reynolds の実験（1883年）によって，近代的な乱流研究が始まったと考えられるが，以来約100年を経ているにもかかわらず乱流現象は依然多くの点で深い謎につつまれている。そこで乱流発生問題に対する近年の研究動向を要約してみると，次のような特徴を挙げうるであろう。(i) 常微分方程式系（力学系）の解の定性的理論の進展により，有限自由度の決定論的微分（差分）方程式が，平衡解や周期解の他に不規則振動（乱雑運動）する解 strange attractor（SA）を安定にもちうることが示唆されるようになった。実際に SA をもつような体系も，Smale の Axiom A を典型として数学的模型としては数多く提出されている。(ii) 乱流現象は流体運動のみに特有なものでなく，化学反応系・非線型光学系・回路系・生態系など広範な分野に現われる現象であることが，実験的にも模型方程式の計算機 simulation によっても知られるようになり，総称して chaos とよばれている。これらは非線型散逸系の例であるが，一方保存力学系における粒子運動が極めて彷徨的かつ乱雑な振舞を示す現象が，stochasticity として古くから天体力学で研究されて居り，ここで蓄積された概念で chaos の究明のために援用されたものも数多い。(iii) レーザー流速計の開発や，ミニコンによるデータ処理技術の進歩によって，流体運動の測定が著しく精密になった。(iv) 計算機の高速化・大容量化によって Navier–Stokes 方程式の解が層流から乱流へ遷移する際に示す挙動をしらべることが，次第に可能になりつつある。

流体乱流は現象に応じて極めて多彩な発生の仕方をするが，それらから谷教授に倣って二つの典型的類型を抽出する。一つは一様定常流（層流）がある速度以上で，微小な乱れに対して不安定化し，周期的振動する他の形の規則流に遷移し，この種の規則的振動流間の遷移を何度か繰返して次第に複雑な振動数成分を含むようになり，最終的にそのスペクトルが線スペクトルから連続スペクトルになって流れが乱流化する場合で，〝緩慢な遷移〟とよばれる。その典型例は二つの同軸円筒間に流体を入れ，内側の円筒を回転した場合の Couette 流（Taylor 渦流）である。もう一つは一様定常流は微小な乱れに対しては安定であるが，ある速度以上で層流領域と乱流領域とが相接しながら間欠的に出現することにより乱流化が始まる場合で，始めに述べた円管中の Poiseuille 流がその典型であって，〝急激な遷移〟とよばれる。そしてこれらの典型的な類型の間に，中間的性格をもつ多様な現象が存在している。このうち急激な遷移に対

する理論的理解は現在までのところあまり進んでいないので，以下では話を緩慢な遷移に限ることにする。

基礎方程式は，非圧縮性粘性流体の速度場$\boldsymbol{V}$・圧力場pに対する Navier–Stokes および連続の方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{V}=-\mathrm{grad}\frac{p}{\rho}+\nu\Delta\boldsymbol{V},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{V}=0 \tag{1}$$

である（ρは密度，νは動粘性率）。この方程式を与えられた境界条件のもとで，適当な初期条件より出発して十分時間が経過した後に，その解の挙動をしらべることが課題となる。空間的３次元流を記述する偏微分方程式としての(1)の解が，時間tを十分大きくしたところでも大域的かつ一意的に存在するか否かは，今なお解かれていない大問題(Global regularity problem)であり，この問題と乱流解との関係も Leray 以来多くの人によって論じられてきたが，確定的な結論には至っていないと考えられる。そこで当面(1)によって乱流発生の問題を考察するに際して，(1)の解は時間が十分経過した後には，粘性の作用によりその短波長成分は減衰して適当な基底に関する有限次元不変部分空間に落込むであろうという Hopf の仮説にもとづいて，(1)を適当な基底に関する有限次元常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=X_{\mu}(x) \tag{2}$$

で近似し，これによって解の挙動の考察を行う立場をとる。 Hopf の仮説は一般の空間的３次元流に対しては証明されていないが，少くとも緩慢な遷移を経て乱流発生に至る問題において成立を期待することは，そう無謀ではないであろう。ここでxは流速を表わす解ベクトル・X_{μ}は十分なめらかなベクトル場とし，μは Reynolds 数に対応する励起パラメータを表わす。このようにして問題を常微分方程式で考えることにすると，常微分方程式における解の分岐理論によって緩慢な遷移における流れの形状の遷移を解明し，さらに(i)で先述した力学系のもちうる SA によって乱流解を理解する途が開ける。

定常流である層流は(2)において，$X_{\mu}(\xi)=0$ を満たすxの相空間における固定点ξによって表わされ，安定に存続する間，ベクトル場のヤコビ行列$DX_{\mu}(\xi)$の固有値$\{\lambda_i\}$（$i=1,2,\cdots$）の実数部分の値はすべて負である。μを次第に増加させていくとき，ある値$\mu=\mu_1$で$\{\lambda_i\}$のうち一組の共役複素固有値λ_1，λ_2の実数部分の値が負から正に転ずると，解xは固定点ξから周期軌道γ_{μ}に遷移する。 これは解の Hopf 分岐とよばれ，層流が周期的振動流に遷移することに対応する。γ_{μ}の安定性をしらべるため，中心多様体定理を用いて問題を不安定化する固有値λ_1，λ_2に対応する２次元不変部分空間の方程式に帰着させ，多重尺度展開などの漸近

展開法を用いて，出現しうる r_μ の振幅 ρ の満たす方程式を導びくと，これは $\alpha'(\mu_1) = d(\mathrm{Re}\,\lambda_1(\mu))/d\mu|_{\mu=\mu_1}$ として，

$$\frac{d\rho}{dt} = (\mu-\mu_1)\,\alpha'(\mu_1)\,\rho + \gamma\rho^3 \tag{3}$$

と書かれる。ここで γ は X_μ の２階および３階の微係数を用いて表わされる。一般に $\alpha'(\mu_1) > 0$ であるから，$\gamma < 0$ であれば $\mu > \mu_1$ で周期軌道 r_μ が安定に出現する（正常分岐・超臨界分岐）。一方 $\gamma > 0$ の場合には，$\mu > \mu_1$ で出現する軌道に関して(3)からは結論できない。以下正常分岐の場合を考えることにすると，$\mu > \mu_1$ で安定に存続する軌道 r_μ のある点 p でこれに横断的な超平面 S を考え，軌道が次に同じ方向に S と交わる点を $\Phi_\mu(p)$ とするとき，写像 $p \to \Phi_\mu(p)$ を Poincaré 写像とよぶ。μ を μ_1 以上さらに増していくとき，r_μ が安定な間は $D\Phi_\mu(p)$ の固有値の絶対値はすべて１より小さいが，これらのうちあるものの絶対値が１になると，その点 $\mu = \mu_2$ で２回目の遷移が起る。

これ以後の逐次遷移で乱流発生に関連して重要な類型は，現在のところ次の二つである。一つは $D\Phi_{\mu_2}(p)$ の一つの固有値 $\lambda_1(\mu_2) = -1$ となる場合で，r_μ は $\mu > \mu_2$ で周期が２倍の閉軌道に遷移する。μ をさらにあげていくにつれこの型の遷移が何度も起り，周期が 2^n 倍の閉軌道が現われ，遷移点が集積すればその後運動は非周期的となり乱流が発生する (May，Brunovsky) この型の乱流発生は Bénard 対流において観測されている。もう一つは $\mu > \mu_2$ で二つの振動数成分によって表わされるトーラス軌道 T^2 に遷移する場合で，μ をあげていくにつれこの型の遷移が何度も起れば一般に運動はトーラス軌道 T^n となり，準周期的運動となる。この十分多数の互に非通約な振動数成分からなる準周期的運動によって乱流を理解するのが，Landau および Hopf の考えである。これに対して，トーラス軌道 T^n を呈するベクトル場には $n \geq 3$ の場合一般にベクトル場のつくる函数空間における微小な位相近傍に，SA をもつベクトル場が開集合として存在するので，T^n はベクトル場に対する微小な摂動に対して安定に存続しえず，実際の運動は SA 上の彷徨運動として現われるであろうから，これによって乱流を理解しようとするのが，Ruelle–Takens の考えということができる。以上は典型的類型について述べたので，乱流発生に導びく遷移はこれに尽されるものでないことはいうまでもない。特にトーラスを経て乱流発生に至る場合，その発生の具体的過程は不明な点が多いと考えられる。

そこで今まで述べてきた方向で乱流発生問題を解明するに当って，今後の課題と思われるものをいくつか列記することにする。(a) 流れの基礎方程式(1)から各具体的な問題に応じて流速振幅の時間発展を記述する模型方程式(2)を導出すること。これは多自由度系からより少数自由度系への記述方程式の還元であり，そこでの変数の逓減・縮約を現象を特徴づける特性的時間

・空間尺度を媒介に行おうとすれば，それは広い意味での非平衡統計力学の課題と考えることができる。しかし現状ではこれは困難な問題なので，通常は実験事実を導びきの糸として実測されている流速振幅成分の時間発展を記述する方程式を，適当な truncation によって導出しているに止ます。多重定常状態やこれと初期条件との関連の問題を考えれば，問題の困難さはさらに深まる。(b) 決定論的方程式の解が，定常状態ないし周期的運動からどのような分岐を経て乱流運動の発生に至るか，その分岐構造の各種類型の枚挙と，各々の類型における乱流運動発生の機構の解明。具体的な方程式系(2)の解の構造は，(2)を計算機によって直接時間積分する外には，力学系の理論によってどの程度まで解明されうるのか。(c) 決定論的方程式が生成する乱流運動の確率過程による特徴づけはどのようにすればよいのか。特に定常分布ないし不変測度はどのように構成されるのか。これがもし実現すれば乱流の統計力学となる。

文献は省略しますが，例えば筆者による解説：数理科学 1980年9月号p.30の引用文献を参照して下さい。